



APLICACIÓN DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES NO LINEALES PARA LA ESTABILIZACIÓN DEL PÉNDULO INVERTIDO MÓVIL

APPLICATION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS LINEAR FOR PENDULUM STABILIZATION INVERTED MOBILE

Richar Marlon Mollinedo-Chura^{1*}, Mateo Alejandro Salinas-Mena², Roger Ccama-Alejo¹

Historia del Artículo:

Recibido: 06 de marzo de 2024

Aceptado: 15 de mayo de 2024

¹ Universidad Nacional del Altiplano, Departamento Académico de Ciencias Físico Matemáticas, Puno, Perú.

rmollinedo@unap.edu.pe ORCID

rccama@unap.edu.pe ORCID

² Universidad Nacional del Altiplano, Departamento Académico de Mecánica Eléctrica, Puno, Perú

msalinasm@unap.edu.pe ORCID

* Autor de correspondencia: Mollinedo-Chura R. M. [rmollinedo@unap.edu.pe]

<https://doi.org/10.56636/ceprosimad.v12i1.136>

RESUMEN

La investigación tuvo por objetivo estudiar el modelo matemático del Péndulo invertido montado sobre una base móvil, la cual es un problema clásico de teoría control su dinámica se asemeja a la de muchos sistemas de interés del mundo real, para lograr este objetivo utilizamos el sistema de ecuaciones diferenciales, leyes de Newton, además las condiciones para llevar a cabo la linealización, así obteniendo el control PID para estabilizar el péndulo a sí mismo se realizó las simulaciones mediante el software Matlab para su análisis y verificación; para tal efecto se diseñó un sistema de control mejorado el cual combina la optimalidad obteniendo el modelo matemático para su implementación en el software mencionado. El presente estudio es del tipo cualitativo, basada en la teoría fundamentada y la inducción analítica, donde se hace una recolección de teorías para lograr los objetivos planteados, asimismo se usan los métodos inductivos y deductivos.

PALABRAS CLAVE: Péndulo invertido, modelo matemático, linealización, simulación.

ABSTRACT

The objective of the research was to study the mathematical model of the inverted pendulum mounted on a mobile base, which is a classic control theory problem. Its dynamics resemble that of many systems of interest in the real world. To achieve this objective we used the differential equations, Newton's laws, as well as the conditions to carry out the linearization, thus obtaining the PID control to stabilize the pendulum itself, the simulations were carried out

using the Matlab software for analysis and verification; For this purpose, an improved control system is designed which combines optimality, obtaining the mathematical model for its implementation in the aforementioned software. The present study is qualitative, based on grounded theory and analytical induction, where a collection of theories is made to achieve the stated objectives, and inductive and deductive methods are also used.

KEYWORDS: Inverted pendulum, mathematical model, linearization, simulation.

INTRODUCCIÓN

Cuando intentamos equilibrar un palo de escoba sobre la palma de la mano, es necesario ajustar continuamente el movimiento de la palma para mantener el palo en posición vertical. En un sistema de péndulo invertido ocurre algo similar, con la diferencia de que en este caso el movimiento está restringido a dos dimensiones (García, Ramírez, Siordia, & Martínez, 2016).

El péndulo invertido es un problema fundamental y emblemático en la teoría de control. Se caracteriza por ser un sistema inestable y no lineal. A menudo se utiliza como ejemplo en contextos académicos, ya que, por un lado, es un sistema de control relativamente accesible y, por otro, permite ilustrar las diferencias principales entre el control en lazo abierto y la estabilización (Patete, Aguirre, & Sánchez, 2011).

En (Silik & Yaman, 2020) se realiza el análisis dinámico desde la perspectiva de controlabilidad y linealización para obtener en primera instancia un controlador de posición y en segundo lugar el de velocidad.

En (Özalp, Varol, Taşci, & Uçar, 2020) especifican el desarrollo de un vehículo que maneja la lógica de estabilización de un péndulo invertido implementando para ello dos leyes de control: lineal y no lineal en el cual se podrán estudiar otros tipos de controladores.

En (Israilov, y otros, 2023) se muestra la aplicación de un robot basado en el péndulo

móvil para asistencia del ser humano en algunas tareas.

MATERIAL Y MÉTODOS

el modelo mecánico que simula el control de un sistema de péndulo invertido montado sobre una base móvil se muestra en la Figura 1. El péndulo está unido a la base a través de una articulación que le permite girar libremente, lo cual le hace inestable (Rojas, 2001).

Una vez equilibrado en su posición vertical, la más mínima perturbación le puede hacer caer en cual dirección, de modo que tan solo el movimiento del carro gobernado por la señal (fuerza) de control $u(t)$, a través de un motor, le puede llevar de nuevo al equilibrio. Con el objeto de simplificar el problema se va suponer que tal como se muestra Figura 1 el movimiento se produce en dos direcciones solamente.

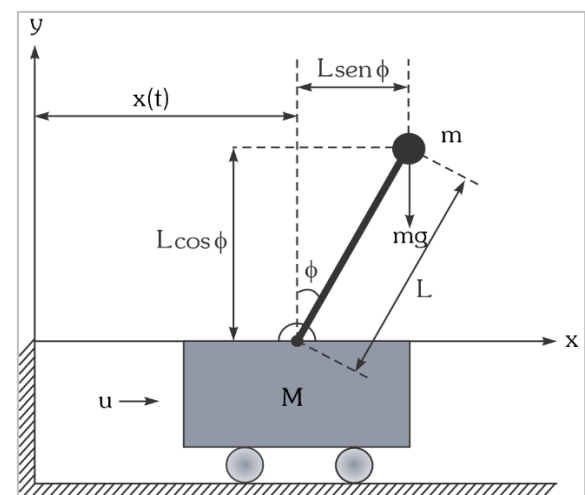


Figura 1
Péndulo invertido sobre una mesa.

El sistema de péndulo invertido objeto de estudio puede moverse en el plano de la página tanto en un movimiento pendular de su masa m , como en un movimiento lineal de la base en la que va montado. En primer lugar, antes de abordar el problema del control del péndulo para mantenerlo en posición vertical, se va a obtener su modelo matemático (modelo de estado de la planta).

Para ello a partir de la referencia que supone la articulación que une el péndulo con la base, se realiza los diagramas de cuerpo libre que se muestran en la Figura 2. Se considera que el conjunto varilla más bola, el peso de la varilla es despreciable, de modo que el conjunto esté aplicado en el centro de gravedad de la bola. La condición es $x(t=0)=0$ y $\phi(t=0)=0$.

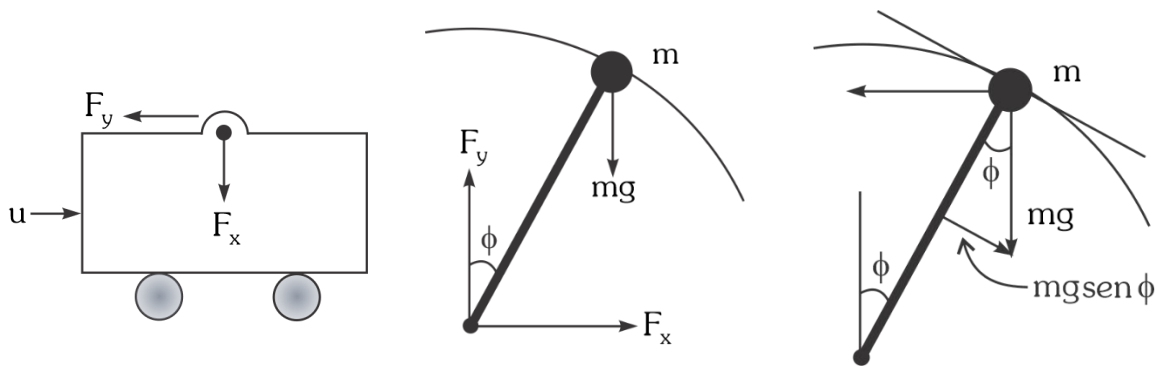


Figura 2

Diagrama de cuerpo libre del péndulo invertido, carro (a), péndulo (b), péndulo (c).

En la Figura 2a, se tiene:

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = u - F_x \quad (1)$$

En la Figura 2b, se deducen las siguientes ecuaciones:

$$F_y - mg = 0 \quad (2)$$

$$F_x = m \frac{d^2}{dt^2}(x + L \text{sen } \phi) \quad (3)$$

sustituyendo la ecuación (3) en (1), se tiene que:

$$(M + m) \frac{d^2x}{dt^2} + mL \frac{d^2(\text{sen } \phi)}{dt^2} = u \quad (4)$$

si bien la ecuación (2) no aporta información significativa, de modo que se plantea otra ecuación, la cual puede ser obtenida estudiando las componentes de las fuerzas en la dirección del movimiento de bola. Así de la Figura 2c, se tiene que:

$$mg \text{sen } \phi = m \frac{d^2}{dt^2}(x + L \text{sen } \phi) \frac{1}{\cos \phi} \quad (5)$$

suponiendo que las desviaciones del péndulo son pequeñas en términos a la posición de equilibrio, se pueden hacer las aproximaciones $\text{sen } \phi \approx \phi$ y $\cos \phi \approx 1$, para ángulos pequeños, con lo cual, las ecuaciones (4) y (5) puede ser linealizado a:

$$(M + m) \frac{d^2x}{dt^2} + mL \frac{d^2\phi}{dt^2} = u \quad (6)$$

$$mg\phi = m \frac{d^2x}{dt^2} + mL \frac{d^2\phi}{dt^2} \quad (7)$$

está claro que ante una señal de entrada $u(t)$, el sistema responde con dos señales de salida claramente diferenciados que son el desplazamiento de la base $x(t)$ y el ángulo del péndulo $\phi(t)$.

despejando ahora $\frac{d^2\phi}{dt^2}$ de la ecuación (7) y sustituyendo en la ecuación (6), se tiene que:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{M}(u - mg\phi) \quad (8)$$

despejando ahora $\frac{d^2x}{dt^2}$ de la ecuación (7) y sustituyendo en la ecuación (6), se tiene que:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = \frac{1}{ML} [(M + m)g\phi - u] \quad (9)$$

los datos que se disponen son:

Tabla 1

Variables y parámetros para el péndulo invertido.

Símbolo	Descripción	Valor/Fórmula
M	Masa del Carro	5 kgr
m	Masa de la esfera	0.25 Kgr
L	Longitud de la varilla	1 m
g	gravedad	9.81 m/s ²

Entonces sustituimos estos valores numéricos en las ecuaciones (8) y (9), se obtienen las ecuaciones que modelan el sistema de control del péndulo invertido:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0.2u - 0.49 \quad (10)$$

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = 10.29\phi - 0.2u \quad (11)$$

se puede observar la inestabilidad de esta planta, ya que si se aplica la transformada de Laplace a la ecuación (11), considerando condiciones iniciales nulas, se tiene que (Schiff, 2013):

$$\frac{\phi(s)}{u(s)} = \frac{-0.2}{s^2 - 10.29} \quad (12)$$

lo cual demuestra que el sistema en lazo abierto es Inestable, ya que se tiene un polo en: $s = \sqrt{10.29}$ que se encuentra en el semiplano derecho del plano laplaciano.

Como el sistema expresado como ecuaciones de estados ecuación (10) y (11) se puede estabilizar en un sistema de lazo cerrado por el método realimentación (o localización de polos), debiendo cumplirse como requisito que el sistema sea completamente controlable, de modo que se cumpla las especificaciones de diseño.

Ahora, utilizando las ecuaciones (10) y (11), se va a deducir la representación en el espacio de estado del sistema de péndulo invertido sobre una base móvil, para ello, teniendo en cuenta que el sistema genera un espacio de estado de 4 dimensiones, se puede hacer las variables de estado como:

$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= \dot{x} \\ x_3 &= \phi \\ x_4 &= \dot{\phi} \end{aligned}$$

Con la cual a partir de estas relaciones y de las ecuaciones (10) y (11) se tiene que:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= 0.2u - 0.49x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= -0.2u + 10.29x_3 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Por otro lado, como ya se ha mencionado, las salidas del sistema son $x(t)$ y $\phi(t)$, con lo cual:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= x = x_1 \\ y_2 &= \phi = x_3 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

De este modo, teniendo en cuenta las ecuaciones (13) y (14), se tiene la ecuación del péndulo invertido montado sobre un base móvil representado en un modelo matricial en variables de estado. Para estabilizar el sistema ecuación (13) por el método retroalimentado (o localización de polos) ubicamos los polos deseados en el semiplano izquierda del plano laplaciano para las condiciones de diseño (Katsuhiko, 2010): tiempo de asentamiento (t_s) para el 2% en torno a 3.2seg y sobre impulso máximo (overshoot) Mp próximo al 15%, un sobre impulso máximo del 15% implica que el factor de amortiguamiento (ζ) es aproximado de 0.52.

$$\begin{aligned} t_s &= \frac{4}{\zeta\omega_n} \text{ para } \delta = 2\% \\ 3.2 &= \frac{4}{\zeta\omega_n} \\ \zeta\omega_n &= \frac{4}{3.2} = 1.25 \end{aligned}$$

$$M = 100e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\zeta = 0.5169 \cong 0.52$$

los dos polos deseados serán:

$$S_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -1.25 \pm j2.0532 \quad (15)$$

los dos polos dominantes (polos restantes) deberán estar situados al menos 5 veces la distancia de los dominantes (parte real).

$$S_{3,4} = 5(-1.25) = -6.25 \quad (16)$$

A continuación, se va proceder el cálculo del vector realimentación de ganancia K que permite trabajar al sistema en las condiciones de desempeño deseados. Para ello se emplearon el software MATLAB. Además, con el objeto de comprobar el funcionamiento del sistema de control, se va realizar una simulación en la que se supone, a modo de ejemplo, que debido a una perturbación externa el péndulo cae hacia atrás de forma súbita un ángulo de -0.15 radianes.

Para modelar un sistema con condición iniciales no nulas, como en este caso, se utiliza la orden de MATLAB siguiente: $[y, t, x] = \text{inicial}(\text{sistema}, x_0, t)$.

Lo cual permite simular la respuesta del modelo de estado del sistema ante condiciones iniciales no nulas.

A continuación, se muestra el listado del programa en MATLAB que resuelve el diseño en cuestión.

RESULTADOS

En esta sección se realiza la simulación en el software MATLAB para presentar los resultados del PIC obtenidos mediante un algoritmo realizado en la versión R2013a y una representación del diagrama a bloques

realizado en ventana de comandos directamente.

Se desarrolla el algoritmo en MATLAB para implementar una función ODE45 (ODE: Ordinary Differential Equations) basada en la resolución de ecuaciones diferenciales aplicando el método de Runge-Kutta (RK) (Houcque) (Hunt, Lipsman, Osborn, & Rosenberg, 2019), la cual resuelve las ecuaciones (10) y (11) que caracteriza el modelo matemático del sistema péndulo invertido sobre el carro aplicando las leyes de movimiento de Newton, tal como se puede ver en la figura 3.

```
clear; close all;
% definición de los valores del sistema
M=5;
m=0.25;
l=1;
g=9.81;
F=0.5;
% definición de función anónima
funcion=@(t,x)[x(2);(m*l*sin(x(1))*cos(x(1))*x(2)-(m+M)*g*sin(x(1))+cos(x(1))*F)/(-(m+M)*l+m*l*cos(x(1))^2);x(3);(m*l*sin(x(1))*x(2)^2-m*g*sin(x(1))*cos(x(1))+F)/(m+M-m*cos(x(1))^2)];
% consideramos que el angulo esta en grados
tspan=linspace(0,50,1000);
[t,x]=ode45(funcion,tspan,[pi/4;0;0;0]);
% devuelve la solución de EDO a través de método numérico Runge kutta
subplot(2,2,1)
plot(t,x(:,1))
title('Angulo \theta')
subplot(2,2,2)
plot(t,x(:,2))
title('Velocidad angular \theta \cdot')
subplot(2,2,3)
plot(t,x(:,3))
title('Posicion x')
subplot(2,2,4)
plot(t,x(:,4))
title('Velocidad x \cdot')
figure(2)
plot(t,x)
title('Pendulo invertido modelo no lineal')
lgd=legend('\theta','\theta \cdot','posicion','x \cdot','location','best');
```

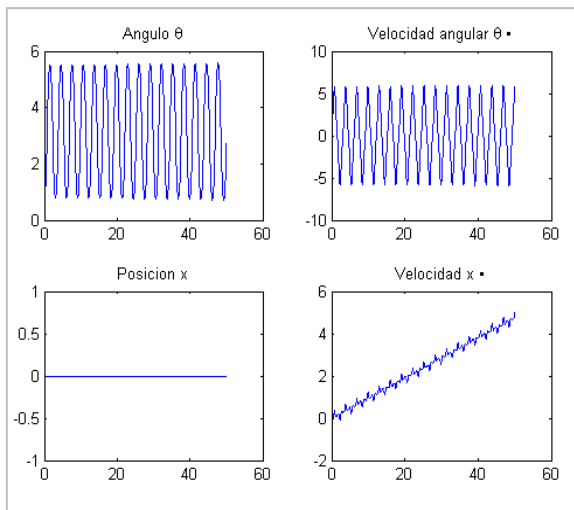


Figura 3
Gráficas de las variables de estado modelo no lineal.

A continuación, presentamos los resultados obtenidos para el controlador PID, cumple la tarea satisfactoria de estabilizar el péndulo, para esto se eligió K_p , K_i y K_d según el método de lugar de raíces, ver figura 4.

```

clc; clear all; close all;
M = 2; m = 0.1; l = 0.5; g = 9.8;
% Función de Transferencia
numtf = [1];
dentf = [M*1 0 -(M+m)*g];
G=tf(numtf, dentf)
s = tf('s');
numtf2 = [1 -19.6];
dentf2 = [2 0 -41.16 0 0];
G2=tf(numtf2, dentf2)
%figure(1)
%rlocus(G)
% PID
Kp = 100;
Ki = 1;
Kd = 20;
%PID = (Kd*s^2+Kp*s+Ki)/s;
C = pid (Kp, Ki, Kd);
T = feedback(G,C);
t=0:0.01:10;
figure(2)
impulse(T,t)
axis([0, 2.5, -0.2, 0.2]);
title({'Respuesta péndulo';' PID : Kp =
100, Ki = 1, Kd = 20'});
    
```

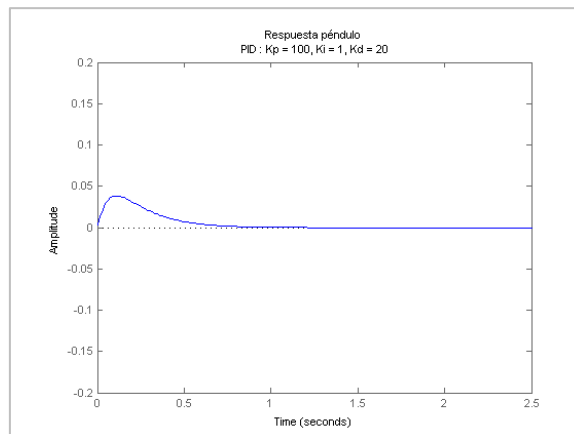


Figura 4
Respuesta ángulo con control PID.

En la figura 5, se muestra el resultado de la simulación. Notándose como el carro inicialmente se mueve hacia atrás para que el péndulo caiga adelante y se equilibre. Se observa que se producen un par de oscilaciones en torno al punto de equilibrio $x=0, \phi=0$ hasta que el cabo de 3.2 segundos aproximadamente, las salidas entran en el rango del 2%. En la figura se muestra el esquema completo del sistema de regulación diseño.

```

function Xp = penduloinv(t,x,K)
ft = 0.1;
M = 2;
m=0.1;
l=0.5;
g=9.8;
U = -K*x; %% ES LA FUERZA
Xp = zeros(4,1);
Xp(1) = x(2);
Xp(2) = (-
m*g*sin(x(3))*cos(x(3))+m*l*(x(4))^2*si
n(x(3))
+ft*m*x(4)*cos(x(3))+U)/(M+(1-
(cos(x(3))^2))*m);
Xp(3) = x(4);
Xp(4) = ((M+m)*(g*sin(x(3))-ft*x(4))-
(1*m*x(4)^2*sin(x(3))+U)
*cos(x(3)))/(1*(M+(1-
(cos(x(3))^2))*m));
end
%%%%
close all
clc
f1 = @penduloinv;
Tf = 6; % tiempo final
T = [ 0:0.01: Tf]; % tiempo
x0 = [1 0 0.01 0]; % inicializacion
    
```

```

K = [-35 -34 -150 -34]; %Ganancia para
ley control U = -kX
[t,x]=ode45(f1,T, x0, [],K);
% PLOT!
figure(1)
subplot(2,2,1)
plot(t,x(:,1))
title('x')
grid
subplot(2,2,2)
plot(t,x(:,2))
title('x \cdot')
grid
subplot(2,2,3)
plot(t,x(:,3))
title('\theta')
grid
subplot(2,2,4)
plot(t,x(:,4))
title('\theta \cdot')
grid

```

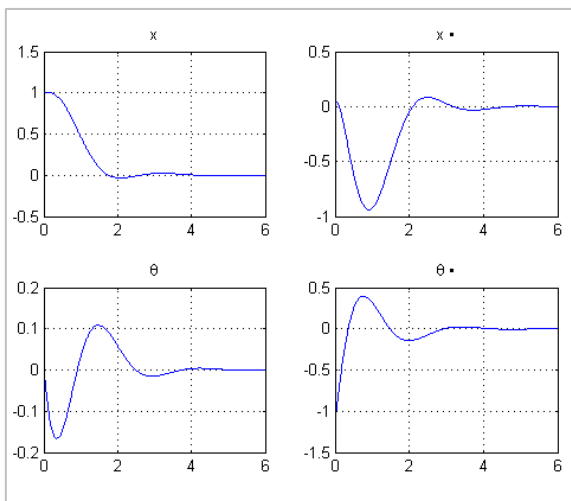


Figura 5
Respuestas Control de Sistema – Estable.

DISCUSIÓN

el modelo matemático que se planteó considerando un sistema de péndulo invertido montado sobre una base móvil, con la esfera en uno de los extremos del brazo (Loya, Arroyo, Rodríguez, & Jaramillo, 2014) y (Triviño, 2020), la linealización del sistema de ecuaciones no lineales, se realizaron mediante aproximaciones de la función seno y coseno para ángulos muy pequeños, estas aproximaciones se realizaron de acuerdo a (García, Ramírez, Siordia, & Martínez, 2016). Sin embargo, la linealización se puede realizar mediante los

métodos empleando técnicas de control lineal, es necesario obtener un modelo lineal del proceso. Suponiendo que las variables de estado se desvían levemente con respecto a una condición de operación (un estado de equilibrio, por ejemplo), la aproximación lineal se puede obtener mediante la expansión en series de Taylor, despreciando los términos de orden superior (Rojas, 2001). El sistema carro-péndulo también podría estar conformado por un carro y una varilla, pero la esfera no necesariamente en el extremo del brazo (Rojas, 2001), entonces el modelo matemático varía ligeramente.

CONCLUSIÓN

En este artículo se obtuvo el modelo matemático del péndulo invertido montado sobre una base móvil usando las ecuaciones diferenciales ordinarias a partir del análisis y la aplicación de las leyes de la dinámica de Newton. Con el modelo matemático se demostró que el sistema es controlable lo que permitió diseñar el controlador por una representación en el espacio de estados con el método de asignación de polos logrando balancear y estabilizar el péndulo invertido. El controlador PID es capaz de estabilizar el ángulo del péndulo, en general el PID puede controlar cualquier aproximación lineal de un modelo matemático no lineal, lo que permite demostrar que el péndulo llega al punto de estabilización lográndose mantener sobre la vertical superior.

AGRADECIMIENTO

Estamos muy agradecidos con los profesores del departamento de Físico-Matemáticas, por su apoyo y colaboración a la presente investigación llevada a cabo en la Universidad Nacional del Altiplano-Puno. Agradecemos también al Fondo Especial de Desarrollo Universitario (FEDU) de la Universidad Nacional del Altiplano por su financiamiento.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- García, J., Ramírez, L., Siordia, X., & Martínez, T. (2016). Las leyes de Newton en el modelado y control del péndulo invertido sobre un carro. *Revista Tecnología e Innovación*, 3(9), 11-19.
- Hunt, B., Lipsman, R., Osborn, J., & Rosenberg, J. (2019). *Differential Equations with Matlab*. New York: Wiley.
- Israilov, S., Fu, L., Sánchez, J., Fusco, F., Allibert, G., Raufaste, C., & Argentina, M. (2023). Reinforcement learning approach to control an inverted pendulum: A general framework for educational purposes. *PLoS ONE*, 18(2), 50-62. doi:<https://doi.org/10.1371/journal.pone.0280071>
- Katsuhiko, O. (2010). *Ingeniería de control moderna*. Madrid: Pearson.
- Loya, H., Arroyo, S., Rodríguez, L., & Jaramillo, D. (2014). Estabilización de un Péndulo Invertido aplicando MPC y LQR. *Politécnica*, 1-5.
- Özalp, R., Varol, N., Taşci, B., & Uçar, A. (2020). A Review of Deep Reinforcement Learning Algorithms and Comparative Results on Inverted Pendulum System. En G. Tsihrintzis, & L. Jain, *Machine Learning Paradigms. Learning and Analytics in Intelligent Systems* (págs. 237-256). Cham: Springer International Publishing. doi:https://doi.org/10.1007/978-3-030-49724-8_10
- Patete, A., Aguirre, I., & Sánchez, H. (2011). Control de un péndulo invertido basado en un modelo reducido. *Ingenierías UC*, 18(1), 12-23.
- Rojas, A. (2001). *Control Avanzado Diseño y Aplicaciones en Tiempo Real*. Lima: Universidad Nacional de Ingeniería.
- Schiff, J. L. (2013). *The Laplace Transform, Theory and Applications*. New York: Springer.
- Silik, Y., & Yaman, U. (2020). Control of Rotary Inverted Pendulum by Using On–Off Type of Cold Gas Thrusters. *mdpi actuators*, 9(95), 1-17. doi:<https://doi.org/10.3390/act9040095>
- Triviño, L. (2020). *Modelado, simulación y control de un péndulo invertido*. España: Universitat Autònoma de Barcelona.